La proportionnalité

1- Encore un tri de problèmes

2- Le segment, 1ère approche

3- La règle de trois

4- Définition, propriétés, procédures induites, programmes 2008, repères

5- Suggestion d'une progression

6- Exemples illustrés

I) Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

- 1- La taille d’une personne varie proportionnellement à son poids.
- 2- Pour l’essence, le prix à payer est proportionnel à la quantité achetée.
- 3- 13 est proportionnel à 7.
- 4- 12 est proportionnel à 4.
- 5- Le périmètre d’un cercle est proportionnel au rayon.
- 6- L’aire d’un cercle est proportionnelle au rayon.
- 7- L’allongement d’un ressort est proportionnel à la masse suspendue.

I) Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

Å8- Pour les rectangles de longueur constante, la largeur est proportionnelle à lôaire.

Å9- Pour les rectangles de périmètre constant, la longueur est proportionnelle à la largeur.

Å10- Pour les rectangles dôaire constante, la longueur est proportionnelle à la largeur.

Å11- Pour le gaz de ville, le tarif est proportionnel à la consommation.

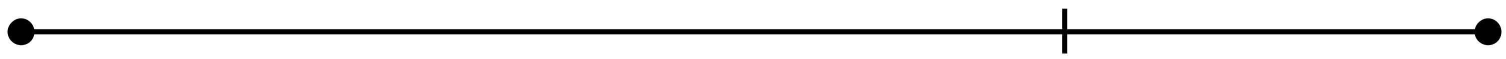
Å12- Pour la déclaration de revenus, le montant de lôimpôt est proportionnel au revenu.

Å13- Pour un parcours (dôune durée donnée), la vitesse moyenne est proportionnelle à la distance.

Nombre dôor et proportion

« Que deux termes forment seuls une belle composition, cela nôest pas possible sans un troisième. Car il faut quôentre eux il y ait un lien qui les rapproche tous les deux. Or de toutes les liaisons, la plus belle est celle qui se donne à elle-même et aux termes quôelle unit, lôunité la plus complète. Et cela, côest la proportion qui naturellement le réalise de la façon la plus belle. »

(Platon)



Un **rapport** est la relation, la comparaison qualitative entre deux grandeurs de même nature ou le nombre qui exprime cette comparaison. Une **proportion** résulte de l'accord ou de l'équivalence de deux ou plusieurs rapports ; il faut donc au moins trois grandeurs (ici le segment porteur et ses deux parties) pour déterminer une proportion.

La proportionnalité

La règle de trois, nôest pas le mode dôaccès le plus aisé vers la **notion**. Elle apparait dans les programmes comme une procédure parmi dôautres.

Son enseignement **trop précoce** est à éviter car on court le risque :

- dôun désengagement des élèves (implication de la mémoire, et automatisation mécanique),
- dôapporter une réponse à une question non posée,
- du passage au « procédural » avant la compréhension.

La proportionnalité

Les questions qu'il ne faut pas sous-estimer :

- Le rapport entre procédure experte et **procédure personnelle** : la perte de sens générée par le passage trop précoce à une procédure experte (que l'élève ne s'est pas appropriée, mais qui lui a été imposée) est durable.

La proportionnalité

Les questions quôil ne faut pas sous-estimer :

Lôengagement dans un processus de compréhension (concept) est le garant de lôengagement en situation de rechercheé

La forme de mémorisation (et surtout sa pérennité) diffère entre procédure comprise et procédure apprise. (des lieux ou des liens)

La proportionnalité

Les questions quôil ne faut pas sous-estimer :

ÅLe sentiment du **piège** mathématique, et les conséquences possibles sur **lôestime de soi.**

Lôapprentissage procédural génère une perte de confiance en soi durable, même chez des gens solidesé

La proportionnalité : définition, propriétés, programmes

D’après des travaux de Dominique Pernoux

(IUFM d’Alsace)

La proportionnalité : définition

ON DIT QUE LA QUANTITÉ **y**

EST PROPORTIONNELLE À LA QUANTITÉ **x**

SI ON PEUT TROUVER UN NOMBRE **a** FIXE tel que $\mathbf{y = ax}$

La proportionnalité :

des exemples pour sôinterroger.

Exemple 1 : **x** est la durée du travail en heures de M. Dupont et **y** est le salaire en francs de M. Dupont.

Exemple 2 : **x** est lôâge de M. Dupont et **y** est le « poids » de M. Dupont)é

La proportionnalité

Propriété n°1

x	Durée du travail (en heures)	4	12
y	Salaire (en euro)	32	96

$\times 8$

8 (€ / h) est le coefficient de proportionnalité

Remarque : la fonction qui à x associe y est la fonction linéaire $x \longmapsto 8x$

Constance du facteur multiplicatif

La proportionnalité

grandeurs non proportionnelles

Age (en années)	2	6
"Poids" (en kilogrammes)	8	18

Le facteur multiplicatif est-il conservé ?

La proportionnalité

Propriété n°2 :

×3

Durée du travail (en heures)	4	12
Salaire (en euro)	32	96

×3

Il s'agit de la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre :
$f(kx) = kf(x)$

Lâccroissement est proportionnel

La proportionnalité

grandeurs non proportionnelles

×3

Age (en années)	2	6
“Poids” (en kilogrammes)	8	18

~~×3~~

Lâaccroissement est-il proportionnel ?

La proportionnalité

Propriété n°3 :

Durée du travail (en heures)	4	12	16
Salaire (en euro)	32	96	128

Il s'agit de la propriété de linéarité pour l'addition :
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Lâajout des grandeurs proportionnelles donne des grandeurs proportionnelles

La proportionnalité
grandeurs non proportionnelles

Age (en années)	2	8	10
“Poids” (en kilogrammes)	8	18	26

Lâajout des grandeurs donne-t-il des grandeurs proportionnelles ?

La proportionnalité

Propriété n° 4 :
Si on fait un graphique les points sont tous sur une même droite passant par l'origine.

Comprendre et reconnaître quôune situation est proportionnelle permet dôanticiper des résultats.

La proportionnalité

Remarques:

a) On peut écrire :

Si je travaille 4 heures, je gagne 32 €

$\boxed{:4}$

Si je travaille 1 heure, je gagne 32 : 4 = 8 €

$\boxed{\times 5}$

Si je travaille 5 heures, je gagne 5 × 8 = 40 €

b) On peut utiliser des “automatismes”:

4	5
32	?

Automatisme n° 1 : $\dfrac{32 \times 5}{4}$

Automatisme n° 2 :
4 x ? = 5 x 32 (« produit en croix”)

On peut « anticiper » des situations inconnues

La proportionnalité

grandeurs non proportionnelles

a) ~~Si j’ai 2 ans, je pèse 8 kg~~

~~Si j’ai 1 an, je pèse 8 : 2 = 4 kg~~

b) On ne peut pas utiliser des “automatismes”.

Pas dâanticipation possibleé

La proportionnalité
Procédure 1

Supposons quôun gâteau coûte 1,50 ú.

Si on utilise le prix dôun gâteau pour trouver tous les prix en multipliant à chaque fois le nombre de gâteaux par 1,5 on utilise, même de façon implicite, le fait que le prix à payer est **proportionnel** au nombre de gâteaux et **on met en avant lôaspect fonctionnel** (*$f : x \rightarrow 1,5x$*).

Le prix unitaire est le coefficient de proportionnalité.

La proportionnalité
Procédure 2

Supposons quûun gâteau coûte 1,50 ú.

Si on dit que « quand on achète 3 fois plus de gâteaux, on dépense 3 fois plus », on utilise une propriété de la fonction linéaire f, appelée **propriété de linéarité pour la multiplication** par un nombre (ici, le nombre 3).

La proportionnalité
Procédure 3

Supposons quûun gâteau coûte 1,50 ú.

Si on dit que « 16 gâteaux coûtent 24 ú car 4 gâteaux coûtent 6 ú et 12 gâteaux coûtent 18 ú », on utilise une propriété de la fonction linéaire f, appelée **propriété de linéarité pour lâaddition.**

La proportionnalité
Procédure 4

Supposons quôun gâteau coûte 1,50 ú.

On peut également envisager une **résolution graphique** basée sur le fait que la fonction *f : x → 1,5x est* représentée par une droite passant par lôorigine.

La proportionnalité

Les programmes 2008 :

- Agrandissement et réduction de **figures planes**, en lien avec la proportionnalité.
- La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de **pourcentage**, **d'échelle**, de **conversion**, **d'agrandissement** ou de **réduction** de **figures**. Pour cela, **plusieurs procédures** (en particulier celle dite de la "règle de trois") sont utilisées.
- résoudre des **problèmes** relevant des quatre opérations, de la **proportionnalité**, et faisant intervenir différents objets mathématiques : **nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas** ;

- CM1 : **-** Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des **situations très simples** de proportionnalité.
- CM2 : **- Résoudre des problèmes** relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux **pourcentages**, aux **échelles**, aux **vitesses moyennes** ou aux **conversions d'unité**, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").

La proportionnalité
Quelques repères

Il est indispensable de construire la **notion** **avant** de donner les procédures expertes qui permettent de trouver une réponse :

Permettre au élèves de se construire une **image mentale** de la proportionnalité avant de passer aux calculs.

La proportionnalité
Quelques repères

Il est indispensable de construire en même temps la non-proportionnalité.

Åil y a des situations où je peux dire :

« Jâachète 5 kg de pommes ; je paie 7 ú. Si jâachetais trois fois plus de pommes (15 kg), je paierais trois fois plus (21 ú). On dit alors que le prix des pommes achetées est proportionnel au "poids" des pommes. »

Åil y a des situations où je ne peux pas dire la même chose :

« Je joue 20 min. au foot ; je marque 3 buts. Si je jouais trois fois plus longtemps au foot (60 min) ; je marquerais trois fois plus de buts (9). Le nombre de buts marqués n'est pas proportionnel à la durée de la partie. »